ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)
Semestre d'automne — 2024-2025

Série 4: Applications linéaires et matrices

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) connaître et manipuler les **représentations matricielles (canoniques)** des applications linéaires ;

(O.2) calculer le **noyau** et **image** d'une application linéaire ;

(O.3) déterminer si une application linéaire est **injective**, **sujective**, ou **bijective** ;

(O.4) connaître le **lien entre SEL et équations matricielles**, et l'utiliser pour **calculer des solutions des équations matricielles**.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- représentation matricielle (ou matrice) canonique d'une application linéaire
- noyau d'une application linéaire
- image d'une application linéaire

Noyau d'exercices

1.1 Applications linéaires et matrices

Exercice 1 (Produit entre une matrice et un vecteur)
Calculer $A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2)$, avec

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 3$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_2 = 1$.

Exercice 2 (Noyau et image d'applications linéaires associés à des matrices)

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\frac{5}{2} \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si $\mathbf{w}$ est dans $\mathsf{Ker}(A)$ et/ou dans $\mathsf{Img}(A)$.

Exercice 3 (Matrices canoniquement associées, injectivité et surjectivité I)

Rappel de la théorie

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si les applications linéaires associées aux matrices précédentes sont injectives, surjectives ou bijectives.

Exercice 4 (Matrices canoniquement associées, injectivité et surjectivité II)

(a) Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ donnée par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y + 4z \\ 5x - 4y + 7z \\ 3x - 2y + 3z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}$$

pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(b) Déterminer si l'application linéaire T est injective, surjective ou bijective.

(c) Déterminer ensuite le noyau $\mathsf{Ker}(T)$ de T, *i.e.* le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathsf{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 5 (Surjectivité et injectivité des endomorphismes)
Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

(a) Montrer que si T est surjective, alors T est aussi injective.
(b) Montrer que si T est injective, alors T est aussi surjective.

1.2 Systèmes linéaires et équations matricielles

Exercice 6 (Forme paramétrique vectorielle)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Écrire l'ensemble solution de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sous forme paramétrique vectorielle.

Exercice 7 (Représentations vectorielles, équations matricielles et décomposition en solution particulière et homogène)
Considérons le SEL

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7, \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6, \end{cases}$$

et soit A la matrice carrée de taille 3 formée avec les coefficients des variables, avec le même ordre que dans le système précédent.

(a) Écrire le système de façon équivalente comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.
(b) Écrire le système sous forme matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
(c) Résoudre l'équation matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
(d) Écrire l'ensemble des solutions sous forme paramétrique vectorielle,
(e) Écrire toutes les solutions de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si elles existent, sous la forme $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$, où $\mathbf{p}$ est une solution particulière du système, et $\mathbf{v}$ est la solution générale du système homogène

Pour compléter la pratique

2.1 Applications linéaires et matrices

Exercice 8 (Matrices canoniquement associées, injectivité et surjectivité III)
Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ -x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 \end{pmatrix},$$

pour tous $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, et déterminer si elle est injective, surjective ou bijective.

Exercice 9 (Matrices canoniquement associées, injectivité et surjectivité IV)
On considère les applications linéaires suivantes :

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ avec $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ avec $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3$, pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$;

(d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;

(e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Dans tous les cas, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

2.2 Systèmes linéaires et équations matricielles

Exercice 10 (Décomposition en solution particulière et homogène)
Considérons les SEL

(a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7, \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

Pour chaque SEL, l'écrire sous la forme matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, et écrire ensuite toutes les solutions, si elles existent, sous la forme $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$, où $\mathbf{p}$ est une solution particulière du système, et $\mathbf{v}$ est la solution générale du système homogène.

Exercice 11 (Compatibilité)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Décrire l'ensemble des vecteurs $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est compatible.

Exercice 12 (Compatibilité avec paramètres)
Déterminer les valeurs des paramètres réels a, b et c pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = a, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = b, \\ x_1 - 7x_2 + 8x_3 + x_4 = c, \end{cases}$$

possède des solutions et les déterminer.

Bonus : un exercice plus compliqué

Exercice 13 (Formes échelonnées réduites et indépendance linéaire)
Décrire quelle est la forme échelonnée réduite de la matrice A dans les cas suivants :

(a) A est une matrice carrée de taille 3 avec des colonnes linéairement indépendantes ;

(b) A est une matrice de taille 4×2 telle que la deuxième colonne de A n'est pas un multiple de la première colonne.

(c) A est une matrice de taille 4×3 telle que les deux premières colonnes de A forment un ensemble libre de $\mathbb{R}^4$ et la troisième colonne n'est pas une combinaison linéaire des deux premières colonnes de A.